Factorisations étranges

Par CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest (Roumanie)

Au 60-ième anniversaire de mon Maître, collaborateur et ami, le Professeur Béla Sz.-Nagy

1. L'un des achèvements auxquels a conduit la théorie des dilatations unitaires, initée il y a 20 ans par B. SZ.-NAGY [1], a été la découverte, en 1964, du rôle joué par les factorisations régulières parmi les factorisations de la fonction caractéristique d'une contraction (voir [3] et [4], Ch. VII). Notamment, à tout sous-espace non-banal $\mathfrak{H}_1$, invariant pour une contraction c.n.u. T dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$[1]), il correspond une factorisation *régulière*[2])

$$\Theta_T(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda) \qquad (|\lambda|<1) \tag{1}$$

de la fonction caractéristique de T en fonctions analytiques contractives telles que les parties de pures de Θ_1 et Θ_2 coïncident aux fonctions caractéristiques de la restriction T_1 de T à $\mathfrak{H}_1$ et de la compression T_2 de T à $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$. De plus, à toute factorisation régulière non-banale (1) de Θ_T correspond un sous-espace non-banal $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{H}$ invariant pour T, tel que Θ_1 et Θ_2 soient liées à T_1 et T_2 de la manière indiquée auparavant.

Dans la conférence [2] au Congrès International des Mathématiciens de Nice (1970), B. SZ.-NAGY a soulevé la question de savoir s'il existe des factorisations *non-régulières* (1), pour lesquelles il existe néanmoins un sous-espace $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{H}$ tel que les parties pures de Θ_1 et Θ_2 coïncident avec les fonctions caractéristiques de la restriction T_1 de T à $\mathfrak{H}_1$ et de la compression T_2 de T à $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$.

A cette occasion, B. SZ.-NAGY a remarqué que si $T\in C_{\cdot 0}$, telles factorisations (que nous appellerons *étranges*) n'existent pas. Ainsi le problème de l'existence des factorisations étranges concerne seulement les fonctions caractéristiques des contractions $T\notin C_{\cdot 0}$, dont on sait qu'elles ont des factorisations (non-banales) régulières (voir [4], Ch. VII, §3 et §5).

---

1) Tous les espaces seront supposés complexes.

2) Pour cette notion aussi bien que pour toutes les autres, qui ne sont pas définies explicitement, nous renvoyons à [4].

Le but de cette Note est d'apporter quelques réponses partielles au problème des factorisations étranges des fonctions caractéristiques.

2. Proposition 1. *Il existe une fonction caractéristique ayant des factorisations étranges.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{E}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Définissons la fonction analytique (en fait constante) contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta(\lambda)\}$ par

$$\Theta(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathfrak{E}} \quad \text{pour tout} \quad |\lambda| < 1, \tag{2}$$

où $I_{\mathfrak{E}}$ désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{E}$ et soit T une contraction c.n.u. dont la fonction caractéristique coïncide à la fonction définie par (2). Il est manifeste que T est une somme orthogonale infinie dénombrable de contractions c.n.u. ayant toutes comme fonction caractéristique la fonction numérique constante $\equiv -\frac{1}{2}$. L'opérateur S dans

$$\mathfrak{G} = (H^2 \oplus L^2) \ominus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} u \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} u \colon \; u \in H^2\right\}$$

défini par

$$S^*(u \oplus v)(e^{it}) = e^{-it}\big(u(e^{it}) - u(0)\big) \oplus e^{-it} v$$

a la fonction caractéristique $\equiv -\frac{1}{2}$ (voir [4], Ch. VI, § 3). Soient dans $\mathfrak{G}$

$$e_n = \begin{cases} 0 \oplus e^{nit} & \text{si } n < 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{int} \oplus \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{int} & \text{si } n \geqq 0. \end{cases}$$

Alors $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ est une base orthonormale dans $\mathfrak{G}$ et

$$Se_n = e_{n+1} \qquad (n \neq -1) \quad \text{et} \quad Se_{-1} = \tfrac{1}{2} e_0. \tag{3}$$

Ainsi la fonction Θ définie par (2) coïncide avec la fonction caractéristique de l'opérateur

$$T = S \oplus S \oplus \cdots \oplus S \cdots$$

(où S est la translation bilatérale pondérée définie par (3)) dans

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G} \cdots$$

Soit $\mathfrak{G}_1$ les sous-espace de $\mathfrak{G}$ engendré par $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ et posons

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots.$$

Alors $\mathfrak{H}_1$ est invariant à T, la restriction T_1 de T à $\mathfrak{H}_1$ est une translation unilatérale de multiplicité infinie tandis que la compression T_2 de T à $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ est l'adjointe d'une telle translation.

Définissons maintenant les fonctions analytiques (en fait constantes) contractives $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Theta_2(\lambda)\}$ par

(4)
$$\begin{cases} \Theta_1(\lambda)\, e = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e \oplus \dfrac{1}{2} e \oplus \dfrac{1}{2} e & (|\lambda| < 1;\ e \in \mathfrak{E}), \\ \Theta_2(\lambda)(e \oplus f \oplus g) = -e & (|\lambda| < 1;\ e, f, g \in \mathfrak{E}). \end{cases}$$

Il est manifeste que les fonctions (2), (4) vérifient (1) et que la partie pure Θ_1^0 de Θ_1 est la fonction $\big\{\{0\}, \{e\oplus f\oplus g : e, f, g \in \mathfrak{E}, \sqrt{2}e + f + g = 0\}, 0\big\}$, tandis que la partie pure Θ_2^0 de Θ_2 est $\big\{\{0\}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}, \{0\}, 0\big\}$. Puisque $\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}$ a la même dimension que $\mathfrak{E}$ on conclut que Θ_i^0 coïncide avec la fonction caractéristique de T_i $(i=1, 2)$. Pour démontrer que la factorisation que nous venons de construire est une factorisation étrange il ne nous reste donc qu'à montrer que cette factorisation n'est pas régulière. Or on a

$$\Delta_1(t) = [I_{\mathfrak{E}} - \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]^{1/2} \equiv 0$$

tandis que

$$\Delta_2(t) = [I_{\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}} - \Theta_2(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{1/2}$$

est la projection orthogonale de $\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}$ sur $\{0\}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}$, quel que soit t. Donc

(5)
$$\overline{\Delta_1\mathfrak{E}} \oplus \overline{\Delta_2(\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E})} = \{0\}\oplus(\{0\}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E})$$

et

(6)
$$\overline{\Delta_1\mathfrak{E}} \oplus \overline{\Delta_2\Theta_1\mathfrak{E}} = \{0\}\oplus(\{0\}\oplus\{f\oplus f\colon\ f\in\mathfrak{E}\}).$$

En comparant (5) à (6) on déduit que

$$\overline{\Delta_1(t)E} \oplus \overline{\Delta_2(t)(\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{E})} \neq \overline{\{\Delta_1(t)e \oplus \Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})e : e \in \mathfrak{E}\}}$$

(pour tout t), d'où le fait que la factorisation que nous venons de considérer n'est pas régulière.

R e m a r q u e. L'opérateur T dont la fonction caractéristique coïncide avec la fonction (2), contient une translation unilatérale de multiplicité infinie ainsi que l'adjoint de tel opérateur. Il y a une certaine analogie entre l'exemple ci-dessus et celui donné dans [4], Ch. VII, no. 4. 3, concernant l'existence des diviseurs réguliers qui ne sont pas forts. Toutefois la multiplicité infinie des translations dans l'exemple ci-dessus semble être essentielle (voir la Proposition 2 ci-dessous).

3. L e m m a. *Soit*

(7)
$$A = A_2 A_1$$

une factorisation régulière, ou $A: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_*$, $A_1: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *et* $A_2: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}_*$, *sont des contractions. Soit*

$$A = B_2 B_1 \tag{7'}$$

une autre factorisation telle que

$$B_2 = U_* A_2 V_2, \quad B_1 = V_1 A_1 U$$

où U_*, V_2, V_1, U *sont des opérateurs unitaires (dans les espaces correspondants). Si l'opérateur de défaut* D_A *est de rang fini alors* (7′) *est aussi une factorisation régulière.*

Démonstration. Comme

$$D_{B_2} = V_2^* D_{A_2} V_2, \quad D_{B_1} = U^* D_{A_1} U \tag{8}$$

on a [3])

$$\dim(\overline{D_{B_1}\mathfrak{A}} \oplus \overline{D_{B_2}\mathfrak{B}}) = \dim(\overline{D_{A_1}\mathfrak{A}} \oplus \overline{D_{A_2}\mathfrak{B}}) = \dim \overline{D_A \mathfrak{A}} < \infty. \tag{9}$$

Soient Z et Z' définis pour $a \in D_A \mathfrak{A}$ par

$$Za = D_{A_1} a \oplus D_{A_2} A_1 a, \quad Z'a = D_{B_1} a \oplus D_{B_2} B_1 a.$$

Les opérateurs Z et Z' se prolongent en des isométries de $\overline{D_A \mathfrak{A}}$ dans $\mathfrak{D} = \overline{D_{A_1}\mathfrak{A}} \oplus \overline{D_{A_2}\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{D}' = \overline{D_{B_1}\mathfrak{A}} \oplus \overline{D_{B_2}\mathfrak{B}}$, selon les cas (voir [4], Ch. VII, § 3). La régularité de (7) veut dire que Z est unitaire. Par suite $W = Z'Z^*$ est une isométrie de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$. En vertu de (9), W doit être unitaire, ce qui oblige Z' d'être aussi unitaire. Ceci signifie que la factorisation (7′) est régulière.

4. Proposition 2. *Soit* T *une contraction c.n.u. aux indices de défaut finis. Alors sa fonction caractéristique* Θ_T *n'admet pas des factorisations étranges.*

Démonstration. Soit $\{E^m, E^n, \Theta_T(\lambda)\}$ la fonction caractéristique de T et soit (1) une factorisation étrange de Θ_T; soit de plus $\mathfrak{F}$ l'espace but de $\Theta_1(\lambda)$ ($|\lambda|<1$) et l'espace source de $\Theta_2(\lambda)$ ($|\lambda|<1$). Avec les notations du no. 1, soit

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2.$$

En vertu de [4], Ch. VII. no. 4. 5, T_1 et T_2 sont aux indices de défaut finis. Comme la partie pure Θ_1^0 et Θ_1 a comme espace source un sous-espace de E^m de dimension $\mathfrak{d}_{T_1}$ et comme espace but un sous-espace de $\mathfrak{F}$ de dimension $\mathfrak{d}_{T_1^*}$ il résulte que

$$\dim \mathfrak{F} = \mathfrak{d}_{T_1^*} + m - \mathfrak{d}_{T_1}.$$

On peut donc supposer que $\mathfrak{F} = E^p$ où $p = \mathfrak{d}_{T_1^*} + m - \mathfrak{d}_{T_1}$. Soit maintenant

$$\Theta_T = A_2(\lambda) A_1(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1) \tag{10}$$

---

[3]) Pour la derniere égalité voir [4], Ch. VII, Prop. 3.2.d.

la factorisation régulière qui correspond au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_1$. Par la même raison que ci-dessus on peut supposer que l'espace intermédiaire dans (10) est E^p. Puisque les parties pures de $\Theta_1(\lambda)$ et $A_1(\lambda)$ coïncident avec $\Theta_{T_1}(\lambda)$, et que celles de $\Theta_2(\lambda)$ et $A_2(\lambda)$ coïncident avec $\Theta_{T_2}(\lambda)$, il résulte aisément, du fait que p est fini, que $\Theta_1(\lambda)$ et $A_1(\lambda)$ coïncident, de même que $\Theta_2(\lambda)$ et $A_2(\lambda)$. Donc il existe des opérateurs unitaires U (dans E^m), V_1, V_2 (dans E^p) et U_* (dans E^n) tels que

$$\Theta_1(\lambda)=V_1A_1(\lambda)U,\quad \Theta_2(\lambda)=U_*A_2(\lambda)V_2 \qquad (|\lambda|<1).$$

Passant à la circonférence on a, presque partout en t, que la factorisation

$$\Theta_T(e^{it}) = A_2(e^{it})A_1(e^{it})$$

est régulière (voir [4], Ch. VII, no. 3. 1). Du lemme précédent on déduit alors que la factorisation

$$\Theta_T(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})$$

est aussi régulière, presque partout en t, donc la factorisation (1) est régulière: contradiction!

Par conséquent dans le cas envisagé il n'existe point des factorisations étranges.

5. En analysant la démonstration de la proposition précédente et en améliorant un peu le lemme du no. 3 on aboutit aisément à la conclusion que la Proposition 2 peut être généralisée en la suivante

Proposition 3. *Soit T une contraction c.n.u. telle que le rang de*

$$\Delta(t) = [I-\Theta_T(e^{it})^*\,\Theta_T(e^{it})]^{1/2}$$

soit fini presque partout en t. Alors Θ_T n'admet pas des factorisations étranges.

Il est possible que la conclusion de cette proposition se conserve sous l'hypothèse plus faible que le rang de $\Delta(t)$ soit fini aux points d'un ensemble de mesure positive.

Bibliographie

[1] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[2] ——— Sous-espaces invariants d'un opérateur et factorisation de sa fonction caractéristique, *Actes du Congrès Intern. Math. Nice* (1970), 2, 459—465.

[3] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Une caractérisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 3426—3429.

[4] ——— *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967); voir aussi les traductions russe (Moscou, 1970) et anglaise (Budapest, 1970).

(Reçu le 2 octobre 1972)